Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen

Sebastian Wartha
Axel Schulz

SINUS

an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Sebastian Wartha, Axel Schulz
Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation: Brigitte Dedekind, Tanja Achenbach
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-208-6

Nutzungsbedingungen

Sebastian Wartha, Axel Schulz

Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen

In diesem Beitrag werden besondere Hürden beim Rechnenlernen beschrieben und Vorschläge diskutiert, wie diese erkannt und überwunden werden können. Zentral ist der Zusammenhang zwischen »verstehendem Rechnenlernen« und dem Aufbau von Grundvorstellungen. Der hier gegebene Überblick ist eine Kurzfassung der ausführlichen Publikation Wartha u. Schulz (in Vorb.).

1 Kompetenz- und prozessorientierte Diagnose

1.1 Ein Beispiel: Anna löst 7+8

Anna besucht die vierte Klasse und soll die Aufgabe 7+8 lösen. Da sie nach längerem Überlegen keine Lösung angeben kann, wird ihr ein Rechenrahmen mit 20 Perlen gegeben. Nun zählt und schiebt Anna zunächst sieben Kugeln einzeln von rechts an den linken Rand. Dann zählt sie weitere acht Kugeln dazu, wobei sie zunächst die obere Reihe vervollständigt. Nach einem kurzen Blick auf die so zusammengeschobene Menge sagt sie: »15«.

1.2 Merkmale einer *prozess*orientierten Diagnose

Im Sinne einer ergebnis- oder produktorientierten Sichtweise hat Anna eine richtige Lösung erzielt. Dennoch entspricht ihr *Lösungsweg* nicht den Erwartungen – schon gar nicht im vierten Schuljahr. Erst wenn die *Bearbeitungswege* berücksichtigt werden, kann offensichtlich werden, welche Prozesse sie bereits kann und welche in Abgrenzung dazu noch nicht. Die Art der Bearbeitung der Aufgabe (hier 7+8) sagt deutlich mehr über Kompetenzen und Defizite aus als die alleinige Betrachtung und Bewertung des Ergebnisses:

- Bearbeitet das Kind die Aufgabe über Zählstrategien?
- (Wie) nutzt das Kind Material zur Lösungsfindung?
- Löst das Kind die Aufgabe über operative Strategien (schrittweise über die Zehn, Nutzen von Verdopplungs- oder Nachbaraufgaben)?
- Weiß das Kind die Aufgabe auswendig?

Gerade unter der prozessorientierten Sichtweise können Hinweise für weitere Diagnostik und Fördermöglichkeiten abgeleitet werden (vgl. Schipper, 2009; Wollring 2010; Wartha u. Schulz, in Vorb.). Anna nutzt beispielsweise den Rechenrahmen als Zählhilfe, sie muss sowohl die Zahlen zählend darstellen als auch die Rechnung über Zählprozesse durchführen. Sie kann jedoch das Ergebnis schon nichtzählend vom Material ablesen. Über analoge Fragen könnten auch die Bearbeitungsstrategien von Subtraktionsaufgaben festgestellt werden. Wie Anna beispielsweise Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 bearbeitet und welche Aufgaben sie im Zahlenraum bis 20 (Zahlzerlegungen, Verdopplungen) auswendig kann.

Ein Ziel der Diagnose ist die Frage nach der Sicherheit bei der Ermittlung von Lösungen und einer Begründung der Ergebnisse. Hierzu wird das Kind aufgefordert, seinen Rechenweg offenzulegen und das Vorgehen zu begründen – ggf. an geeignetem Material.

1.3 Merkmale einer *kompetenz*orientierten Diagnose

Aufgaben werden neben anderen Funktionen auch mit dem Ziel gestellt, den Lernstand zu erfassen. Anders als bei einer defizitorientierten Diagnostik, die die fehlenden Kompetenzen des Kindes analysiert, soll eine kompetenzorientierte Diagnostik die Inhaltsbereiche identifizieren, in denen das Kind sicher ist. Diese Inhalte stellen also den »festen Boden« dar, auf dem weitere Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten aufgebaut werden können. Hierüber können Fördermaßnahmen geplant werden, die an Vorwissen anknüpfen.

Die Aufgaben und die Interpretation der Lösungswege orientieren sich *nicht* daran, was das Kind altersgemäß bereits können sollte. Am Beispiel von Anna wird deutlich, wie wenig zielführend die Orientierung an der Altergruppe bzw. dem Lehrplan sein kann. In Bezug auf eine angestrebte Förderarbeit ist die Feststellung wichtig: Das rechnerische Niveau ist ungefähr das einer Schulanfängerin. Diese Einordnung ermöglicht durchaus eine inhaltliche Förderperspektive: Thematisiert und erarbeitet wird zunächst der Stoff des ersten Schuljahres, also das Rechnen im Zahlenraum bis 20.

Kompetenzorientiert kann festgehalten werden, dass Anna die Zahlen 7 und 8 zwar zählend, aber richtig am Rechenrahmen einstellen kann und hierbei die Konventionen, die Perlen an den linken Rand zu schieben und zunächst eine Stange zu füllen, richtig beachtet. Sie weiß auch, dass der Ausdruck »plus« mit »Hinzufügen« interpretiert werden kann. Schließlich kann sie die eingestellte 15 ohne Zählprozesse ablesen.

Die Merkmale einer kompetenz- und prozessorientierten Diagnose sind:

- Flexible, adaptive Gestaltung des diagnostischen Interviews (Welche weiterführenden Fragen ergeben sich aus bestimmten Antworten?)
- Großer Erkenntnisgewinn (An welches Vorwissen kann angeknüpft werden? Welche Inhalte müssen vorrangig erarbeitet werden?)
- Direkt abzuleitende Handlungsoptionen für mögliche Förderung (z. B. Ablösung vom

zählenden Rechnen, Thematisieren von nichtzählenden Zahldarstellungen am Material; aber *kein* Vertiefen der schriftlichen Verfahren, *keine unreflektierten Übungen* zum Rechnen im ZR bis 20)

- Die Durchführung der Diagnose erfordert ein großes und flexibles mathematikdidaktisches Wissen, wie geeignete Aufgaben zu stellen und wie Antworten zu interpretieren und einzuordnen sind.

Nur wenn die Diagnose Auskunft gibt über Problembereiche und über vorhandene Kompetenzen, ermöglicht sie die Auswahl konkreter Fördermaßnahmen für das einzelne Kind und wird dadurch eine »handlungsleitende Diagnostik« (Wollring, 2010). Für die Organisation von Diagnose- und Fördersituationen kann das Konzept mathematischer Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) sehr hilfreich sein, weil hierüber sowohl unterrichtliches Handeln organisiert (Auswahl geeigneter Aufgaben, Planung von Lernumgebungen) als auch Denk- und Lösungsprozesse beschrieben werden können.

2 Grundvorstellungen

2.1 Grundvorstellungen: Begriffsklärung

Im Kreislauf mathematischer Denkprozesse (einer Abwandlung des bekannten Modellierungskreislaufes nach Blum et al., 2004, vgl. Abbildung 1) können die verschiedenen Schritte bei der Lösung von Aufgaben nachgezeichnet und die Rolle von Grundvorstellungen aufgezeigt werden (Wartha, 2011).

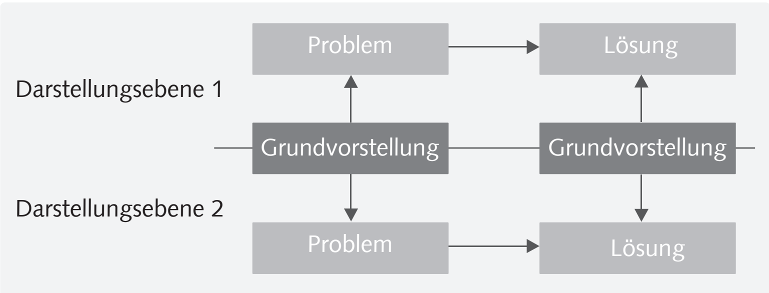

Abb. 1: Grundvorstellungskreislauf

Häufig können Aufgaben aus dem Bereich der Grundschule und der Sekundarstufe I, die auf symbolischer Ebene (7+8) gestellt werden, ohne Übersetzungsprozesse innerhalb dieser Darstellung gelöst werden. Ein Verständnis des mathematischen Inhalts in der Grundschule und der Sekundarstufe I wird dann unterstellt, wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung (Handlung, Bild, Realsituation) möglich ist. Im Falle der Aufgabe 7+8 bedeutet dies, dass Grundvorstellungen zur Addition (z. B. Hinzufügen) und zu den Zahlen (z. B. als Anzahl) aktiviert werden ①, anschließend auf bildlicher oder handelnder Ebene zu 7 Objekten 8 dazugefügt werden ② und über eine Grundvorstellung zur Kardinalzahl die Anzahl der entstandenen Menge als »15« auf die symbolische Ebene zurückübersetzt wird ③ (Abbildung 2 auf der nächsten Seite).

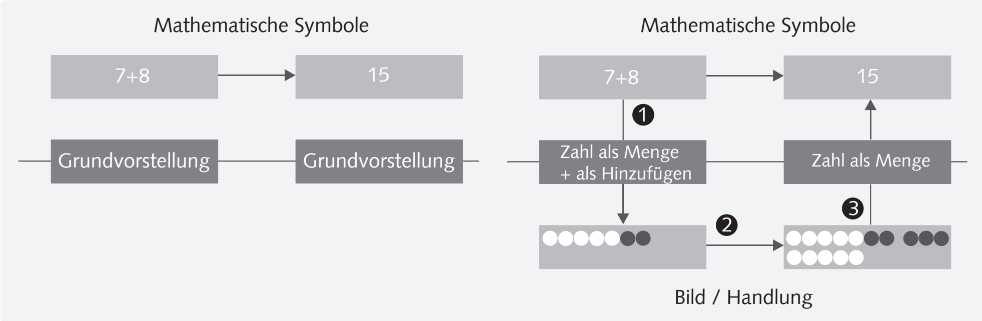

Abb. 2: Grundvorstellungsumweg bei der Aufgabe 7+8

Wenn beide Wege zur Lösung der Aufgabe 7+8 möglich sind, kann unterstellt werden, dass das Kind die Aufgabe nicht nur auswendig gelernt, sondern auch Grundvorstellungen aktiviert hat. Der »Grundvorstellungsumweg« erscheint bei der Aufgabe 7+8 vergleichsweise trivial. Die Aufforderung (an Lernende, aber auch an Lehrende), beispielsweise 924–498 nach einem schriftlichen Ergänzungsverfahren oder den Term $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ nicht nur auf symbolischer Ebene, sondern auch am geeigneten Material handelnd zu bearbeiten, kann Aufschluss darüber geben, ob zu den Strategien Grundvorstellungen entwickelt oder ob nur unverstandene Rezepte angewandt wurden.
Im Beispiel von Anna kann festgestellt werden, dass sie sogar gezwungen ist, die Aufgabe über den Grundvorstellungsumweg zu bearbeiten; ein Abruf von Faktenwissen ist nicht möglich. Kompetenzorientiert kann ihr jedoch unterstellt werden, dass sie Grundvorstellungen zur Addition (Hinzufügen) und zu den Zahlen aktivieren kann.

2.2 Grundvorstellungen zu Zahlen

Kinder in der Primarstufe sollen natürliche Zahlen »verstehen«, insbesondere sollen sie ein »Verständnis« für das Stellenwertsystem erwerben (KMK, 2005). Was genau »verstehen« bedeutet, bleibt meist offen. Sicher ist, dass Kinder *Grundvorstellungen* zu Zahlen in ihren verschiedenen Aspekten und zu deren Schreibweise im Stellenwertsystem aufbauen können und sollen. Wie bei den Operationen ermöglichen Grundvorstellungen die Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungen. Sie werden benötigt, um beispielsweise zwischen einer Menge und dem entsprechenden Zahlwort übersetzen zu können (Zahlauffassung) bzw. zu einem Zahlwort oder einer notierten Zahl eine passende Menge herzustellen (Zahldarstellung).

2.3 Grundvorstellungen zu Rechenoperationen

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen ermöglichen Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen. Man kann feststellen, dass beispielsweise ein Term (symbolisch formuliert) eine Vielzahl an möglichen Übersetzungen erlaubt: Einerseits kann der Rechenausdruck in verschiedene Darstellungen (Bilder, Handlungen, realitätsnahe Kontexte, …) übertragen werden, andererseits können verschiedene Grundvorstellungen aktiviert werden, die verschiedene Strukturen der Bilder, Handlungen, Textaufgaben, erzeugen. So kann das Zeichen + für Situationen des Zusammenfassens, des Hinzufügens oder der Verknüpfens von Änderungen interpretiert werden. Das Subtraktionszeichen kann hingegen mit Aufgabenstellungen zum Wegnehmen, Vergleichen (Unterschiedsbildung) oder Ergänzen in Verbindung gebracht werden. Insbesondere kann das Subtrahieren als Umkehrung des Addierens betrachtet werden: Zusammen haben Helena und Melanie 14 Plättchen. Melanie hat 6. Wie viele hat Helena?

2.4 Grundvorstellungen zu Strategien

Beim Rechnen wird deutlich, dass Grundvorstellungen in Beziehungen zueinander stehen, also vernetzt sind. Wenn beispielsweise die Lösung der Aufgabe 7+8 auf rein symbolischer Ebene (noch) nicht möglich ist, wenn das Ergebnis also nicht auswendig abgerufen werden kann, so ist für eine Bearbeitung auf bildlicher oder handelnder Ebene der Einsatz mehrerer Grundvorstellungen nötig:

1 Eine Grundvorstellung zur Addition (z. B. Hinzufügen) muss aktiviert werden, damit die Vokabel »plus« bzw. das Zeichen »+« in eine Handlung übersetzt werden kann.
2 Aktivierung von Grundvorstellungen zu den verwendeten Zahlen (z. B. Zahl als Anzahl), die die Übersetzung der Wörter *sieben* und *acht* auf die bildliche oder handelnde Ebene ermöglichen.

Die Aktivierung dieser Vorstellungen ist eine notwendige, aber noch keine hinreichende Voraussetzung für die Ermittlung der Lösung. Hierfür sind zusätzlich Strategien nötig, wie nun mit den Mengen beim Hinzufügen umgegangen wird. Das Alles- oder das Weiterzählen sind erste Strategien. Es gibt jedoch auch andere, nichtzählende Verfahren, wie mit den Zahlen bzw. Mengen gerechnet werden kann (vgl. Tabelle 1). Da die Strategien sowohl auf symbolischer Ebene als auch handelnd oder mit Bildern durchgeführt werden können, kann von Grundvorstellungen zu Strategien gesprochen werden.

Darstellung 1		Grundvorstellung		Darstellung 2
7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8	↔	Weiterzählen	↔	8 9 10 11 12 13 14 15 ○ ○ ○ ○ ○ ● ● ●
●●●●●○○ ●●●●●○○ ○○○ ●●●●●○○○○○ ●●●●●	↔	Schrittweise über 10 (Teilschrittverfahren)	↔	7 8+3=10 10+5=15
7 7+7=14 14+1=15	↔	Verdoppeln nutzen Nachbaraufgabe nutzen	↔	●●●●●○○ ●●●●●○○ ●●●●●○○ ●●●●●○○ ●●●●●○○○

Tab. 1: Beispiele für Grundvorstellungen zu Strategien am Beispiel 7+8

Häufig werden Strategien wie Rezepte abgearbeitet, ohne dass hierzu Grundvorstellungen aufgebaut worden sind (vgl. Selter u. Spiegel, 2008). Typische Rezept-Strategien sind beispielsweise Ergänzungsstrategien beim schriftlichen Subtrahieren, das Vorgehen bei der schriftlichen Multiplikation oder der »Trick«, dass bei der Division mit einem Bruch der Kehrbruch multipliziert wird.

Zahlreiche empirische Studien belegen, dass das Anwenden von unverstandenen Algorithmen sehr fehleranfällig ist (Benz, 2007; Selter, 2000). Konsens besteht darin, dass die Strategien verstanden werden sollen, dass also Grundvorstellungen zu ihnen aufgebaut werden. Im Grundvorstellungskonzept bedeutet das, dass eine Strategie nicht allein als symbolische Darstellung, sondern auch über Handlungen oder durch Bilder beschrieben werden kann.

Eine effektive Planung von Diagnose- und Fördermaßnahmen kann durch die Orientierung an Grundvorstellungen geschehen. Mögliche Leitfragen sind hierbei:

- Durch welche Grundvorstellungen kann der Lerninhalt beschrieben werden?
- Welche Übersetzungen ermöglicht eine Grundvorstellung?
- Können Grundvorstellungen beim Übersetzen (zwischen Handlungen / Bildern und den mathematischen Symbolen) aktiviert werden?
- Können Grundvorstellungsumwege beim Arbeiten von Lernenden auf symbolischer Ebene auf Nachfrage aktiviert werden?

3 Hürden im Lernprozess

3.1 Verfestigtes zählendes Rechnen

Für Schulanfänger ist das zählende Rechnen eine naheliegende und meist die einzige Möglichkeit, Rechenaufgaben und einfache mathematische Sachsituationen zu bearbeiten. Ist die Bedeutung des Plus-Zeichens bekannt, kann z. B. die Aufgabe 7+8 über verschiedene Zählstrategien (Alleszählen, Weiterzählen, Weiterzählen ab dem größeren Summanden) gelöst werden (Schipper, 2009; Moser Opitz, 2002). Diese Strategien sind zu Schulbeginn bis zur Mitte des ersten Schuljahres noch erwartungskonform, sie sollten jedoch im Laufe des ersten Schuljahres zugunsten anderer Strategien abgelöst werden (Schipper, 2008; Lorenz 2003; Moser Opitz 2002).

Wird das Zählen vom Kind jedoch als einzige Strategie genutzt, kann die Entwicklung der anderen Strategien behindert werden und Grundvorstellungen zu diesen Strategien können nicht oder nur erschwert aufgebaut werden (Gaidoschik, 2010). Das hängt zunächst damit zusammen, dass das Zählen zu Beginn des Rechnenlernens eine – vor allem subjektiv wahrgenommen – sinnvolle und erfolgreiche Strategie ist.

Der Aufbau einer neuen, nichtzählenden Strategie (beispielsweise 7+8 schrittweise über die 10) erfordert sehr viel mehr Voraussetzungen als das Weiterzählen:

- Einsicht in die Konvention und die Vorteile der Strategie
- Verständnis für die besondere Rolle der 10 im dezimalen Stellenwertsystem
- Einsicht in Zahlbeziehungen zwischen 7, 8 und 10
- Zahlzerlegungen der 10 und der 7
- Einsicht in das Stellenwertsystem für den Rechenschritt 10+5

Verlässt sich ein Kind auf das Weiterzählen und werden mit ihm die notwendigen Voraussetzungen für andere Verfahren nicht zielgerichtet erarbeitet, ist es möglich, dass es bei dieser Vorgehensweise bleiben wird. Hinzu kann kommen, dass einige Kinder – gerade weil sie im Weiterzählen eine erfolgreiche Strategie gefunden haben – die genannten Voraussetzungen als überflüssig erachten. Das verfestigte zählende Rechnen kann daher nicht nur eine Folge des Fehlens der oben beschriebenen Voraussetzungen, sondern auch ein Grund sein, warum diese nicht entwickelt werden können (Kaufmann u. Wessolowski, 2006; Lorenz, 2009). Wenn der Zählprozess ausschließlich zur Lösungsfindung genutzt wird, kann dies die Einsicht in den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis verhindern. Dadurch kann das Kind nur schwer ein Repertoire an auswendig beherrschten Aufgaben entwickeln und Zusammenhänge (Hilfsaufgaben, alternative Lösungswege) nicht erkennen.
Spätestens im Zahlenraum bis 100 sind die Zählstrategien der Kinder nicht mehr tragfähig, auch wenn diese im Zahlenraum bis 20 noch vergleichsweise schnell und sicher zu richtigen Ergebnissen geführt haben. Wenn nicht auf andere Strategien zurückgegriffen werden kann, werden häufig individuelle »Hilfsregeln« erfunden, wie beispielsweise ziffernweise zu rechnen (Schipper, 2005; Lorenz, 1998). Solche individuellen Hilfsregeln, die in vielen Fällen unverstandene Rechentricks sind, werden als Ersatz für tragfähige Rechenstrategien genutzt. Das Nutzen dieser Rechentricks, zu denen häufig keine Grundvorstellungen aktiviert werden können und die nach (eigenen) Regeln eingesetzt werden, kann zu Übergeneralisierungen und Verwechslungen führen. Eine der häufigsten Übergeneralisierungen kann auftreten, wenn ziffernweise gerechnet wird: 85–67=22, hier werden die Absolutbeträge (Unterschiede) von Zehner- und Einerziffer bestimmt.
Eine weitere Folge des verfestigten zählenden Rechnens kann die unzureichende Entwicklung eines Stellenwertverständnisses sein. Zwei Gründe liegen nahe: Zunächst wird die besondere Rolle der Zehn durch den ergebnisorientierten Zählprozess nicht deutlich. Es wird einfach über die 10, die 20, usw. hinweggezählt. Darüber hinaus verhindert der Zählprozess, bei dem Zahlen als Endpunkt einer Zahlreihe aufgefasst werden, die Einsicht in die Zusammensetzung von Zahlen aus Zehnern und Einern (Gerster, 2009).
Wenn Addition und Subtraktion ausschließlich als Vor- bzw. Rückwärtszählen verstanden werden, kann sich ein Verständnis für andere Operationen nur schwer entwickeln (z. B. Subtraktion als Ergänzen, Addition als Änderung) (Lorenz, 2009; Gaidoschik, 2010). Dies wird vor allem bei Sachsituationen deutlich, in denen die Rechenoperationen flexibel eingesetzt werden müssen und nicht nur einseitig aktiviert werden können.
Es kann also zusammengefasst werden: Zählendes Rechnen erschwert den Aufbau von Grundvorstellungen zu Strategien, Zahlen und Operationen.

3.2 Probleme beim Stellenwertverständnis

Für ein Verständnis der Konventionen unseres Stellenwertsystems ist eine flexible Einsicht in den Zusammenhang zwischen Zahlwort, Zahlzeichen und Menge notwendig (vgl. Fuson et al., 1997). Diese Einsicht beruht auf der wechselseitigen Aktivierung von Grundvorstellungen zu diesen Aspekten einer Zahl.

Eine weitere Voraussetzung ist die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen. Daher kann verfestigtes Zählen die Entwicklung dieser Einsicht behindern, wenn Zahlen ausschließlich als Zahlwortreihen bzw. als Endpunkt dieser Reihe verstanden werden, denn wenn »Zahlen *nicht* die Eigenschaft der Zerlegbarkeit haben, können vermutlich *deshalb* sprachliche und visuelle Analysen der Art ›48 sind acht und vierzig‹, ›40 und 8 ist dasselbe wie 8 und 40‹ (gesprochen acht-und-vierzig) nicht vorgenommen werden« (Gerster 2009, 261 Hervorhebungen im Original; vgl. Abbildung 3a u. b). Nicht nur für die Unterscheidung von Zehnerzahl und Einern (vgl. Abbildung 3b) ist diese Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen wichtig, sondern ebenso für das Verständnis, dass die Zahl 40 auch aus vier Zehnern besteht, und nicht nur aus vierzig Einern (vgl. Abbildung 3b u. c).

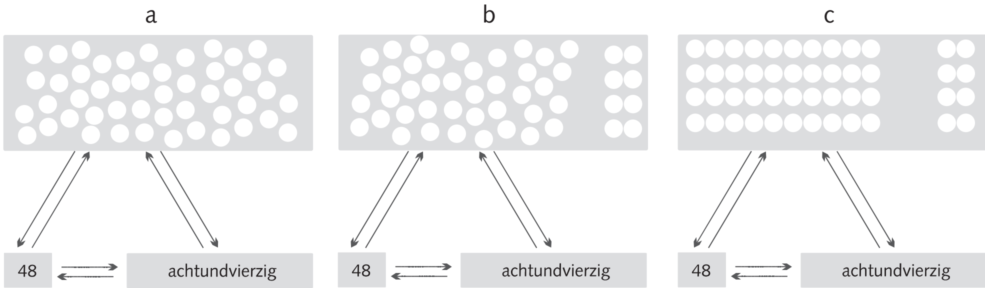

Abb. 3: Zusammenhang zwischen Zahlwort, Zahlzeichen und Menge bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses

In zahlreichen Vergleichsstudien konnte nachgewiesen werden, dass Unregelmäßigkeiten bei der Zahlwortbildung im Gegensatz zu sehr regelmäßigen Bildungsregeln (z. B. im chinesischen oder koreanischen) die Entwicklung des Stellenwertverständnisses negativ beeinflussen (Sarama u. Clements, 2009). Neben zahlreichen Ausnahmen bis zum Zahlwort einunddreißig ist vor allem die inverse Zahlwortbildung aller Zahlen von 13 bis 99, die der Schreib- und Leserichtung westlicher Kulturen entgegenläuft, als möglicher Risikofaktor zu nennen (vgl. Schipper, 2009). Die Diskrepanz zwischen Notation (zuerst links Zehner, dann rechts Einer) und Sprechweise (zuerst Einer, dann Zehner) von zweistelligen Zahlen und die als »einfacher Ausweg« aus diesem Dilemma verstandene inverse Schreibweise (zuerst rechts den Einer, dann links Zehner) kann zu mindestens drei Problemen bei der Entwicklung eines Stellenwertverständnisses führen (Schipper, 2009, Gaidoschik, 2008):

- Wird die inverse Schreibweise nicht konsequent eingehalten (was häufig der Fall ist), können Zahlendreher entstehen.
- Die Reduzierung der Zahlwörter auf den Klang der einzelnen *Ziffern beim Schreiben* kann die sichere Unterscheidung von Zehnern und Einern im Zahlwort verhindern.
- Spätestens beim Schreiben dreistelliger Zahlen müssen beim Notieren »Lücken« gelassen werden.

Weitere Interferenzen zwischen Zahlwort und Zahlschreibweise können darin liegen, dass die einzelnen Ziffern (bzw. Zahlen) der Zahl dreiundvierzig nicht der Konvention entsprechend ihrem jeweiligen Stellenwert zugeordnet (43), sondern geschrieben wie gesprochen werden: 403 (wenn das Notieren der Zehner links von den Einern schon geklärt ist) oder 340 (wenn dies noch nicht der Fall ist) (vgl. Fuson et al., 1997; Schipper, 2009; Scherer u. Moser Opitz, 2010).

Ob ein gut entwickeltes Stellenwertverständnis Voraussetzung für sicheres und flexibles Rechnen ist, oder ob umgekehrt sicheres Rechnen und die Thematisierung verschiedener Rechenstrategien die Entwicklung des Stellenwertverständnisses positiv beeinflussen, konnte in der mathematikdidaktischen Forschung bisher nicht abschließend geklärt werden. Es ist jedoch unbestritten, *dass* es einen Zusammenhang gibt: Kinder, bei denen das Stellenwertverständnis noch unzureichend ausgebildet ist, lösen Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben mehrstelliger Zahlen häufig über den schriftlichen Algorithmus oder rechnen ziffernweise (Benz, 2007). Nicht alle Kinder, die schnell und richtig Lösungen von Additions- und Subtraktionsaufgaben mit mehrstelligen Zahlen bestimmen – meist durch das Anwenden der schriftlichen Algorithmen, verfügen über ein gut entwickeltes Stellenwertverständnis. Aus diesen Ergebnissen lässt sich zwar kein kausaler Zusammenhang schließen, sie lassen aber die Folgerung zu, dass Kinder stellen- oder ziffernweise rechnen können, ohne über ein tragfähiges Stellenwertverständnis verfügen zu müssen (Benz, 2007).

4 Aufbau von Grundvorstellungen

Es wurde gezeigt, dass beim Zählenden Rechnen bzw. einem mangelhaft ausgebildeten Stellenwertverständnis der Aufbau von Grundvorstellungen nur unzureichend gelingen kann. Die Grundidee beim Aufbau von Grundvorstellungen ist, dass *konkrete* Handlungen an geeigneten Materialien zu *gedanklichen* Operationen umgebaut werden (vgl. vom Hofe, 1995). Dieser Prozess des *Verinnerlichens von Handlungen* (Fricke, 1959) kann – gerade bei leistungs*stärkeren* Kindern – häufig scheinbar ohne besondere Unterstützung geschehen. Leistungs*schwächere* Kinder zeichnen sich hingegen oft dadurch aus, dass sie zwar am Material eine Handlung konkret durchführen, jedoch der Aufforderung »Beschreib mal, was du am Material tun müsstest« nicht nachkommen können, oder dass ein Lösungsweg ohne Material gar nicht möglich ist (wie bei Anna). Der Prozess vom *konkreten* zum *gedanklichen* Handeln kann durch folgende vier Phasen unterstützt werden:

1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Tab. 2: Vierphasenmodell

Vielen Kindern gelingt der Sprung vom konkreten Handeln (Phase ①) zum Handeln in der Vorstellung (Phase ④) nicht ohne Unterstützung. In diesen Fällen ist es hilfreich, das Kind zunächst (beispielsweise in Partnerarbeit) die Handlung nicht mehr selbst durchführen, jedoch den Handlungsprozess beschreiben zu lassen (Phase ②). Um nun den Aufbau des gedanklichen Modells weiter zu fördern, wird dem Kind die Sicht auf das Material genommen, das beispielsweise hinter einem Sichtschirm verborgen wird. Das Kind soll nun beschreiben, wie der Partner die Handlung durchführen soll. Hierzu ist es darauf angewiesen, sich ein Bild vor einem »geistigen Auge« zu konstruieren und hiermit mental zu operieren (Phase ③).

1	*Handeln an geeignetem Material* Berechne 74–7. Hierzu soll zunächst 74 mit möglichst wenigen Zügen am Rechenrahmen eingestellt werden, dann 4 Einer zurückgeschoben werden (Zwischenergebnis 70) und schließlich die fehlenden 3 weggeschoben werden (Ergebnis 67).
2	*Beschreiben der Materialhandlung* Das Kind soll diktieren, wie die Aufgabe 47+8 am Rechenrahmen gelöst werden soll.
3	*Beschreibung der Materialhandlung in der Vorstellung* Das Kind soll diktieren, was am Rechenrahmen hinter dem Sichtschirm geschoben werden muss, um die Aufgabe 92–6 zu lösen.
4	*Arbeiten auf symbolischer Ebene* Weitere Aufgaben des Typs ZE±E mit und ohne Zehnerübergang werden gestellt und sollen bearbeitet werden. Bei falschen und richtigen Bearbeitungen wird hin und wieder Bezug auf die entsprechende Materialhandlung genommen.

Tab. 3: Schrittweise über den Zehner

Für den Erwerb dieser Strategie sind zahlreiche Voraussetzungen wie nichtzählende Zahldarstellung und -auffassung sowie das Auswendigwissen der Zahlzerlegungen nötig. Darüber hinaus sollen dem Kind Eigenschaften und Konventionen des verwendeten Materials, dem Rechenrahmen, vertraut sein und von ihm genutzt werden (vgl. Schulz u. Wartha, im Druck).

Aus diesem Vierphasenmodell ergeben sich mehrere Grundsätze für die Diagnose- und Förderarbeit, insbesondere bei schwachen Lernenden:

- Diagnose, in welchen Phasen ein Kind sicher arbeiten kann und in welchen Phasen es überfordert ist
- Kein Überspringen der Phasen ② und ③ beim Aufbau von Grundvorstellungen
- Bei Schwierigkeiten nur in die nächst-niedrigere Phase zurück gehen, das Kind nicht sofort wieder konkret am Material (Phase ①) handeln lassen.

Hier wurde nur ein Beispiel gezeigt, wie mit dem Arbeiten im Vierphasenmodell Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenstrategien aufgebaut werden können. Das Konzept lässt sich auf weitere Grundvorstellungen übertragen:

- Zehneranalogie: Aufgaben wie 76–30 an den Mehrsystemblöcken: 7 Zehnerstangen und 6 Einerwürfel. Die Subtraktion –30 entspricht dem Entfernen von 3 Z-Stangen: An den E-Würfeln ändert sich nichts, das Wissen 7–3=4 kann als Analogie auf die Zehner übertragen werden.

- Lesen und Schreiben von Zahlen: Gesprochene oder geschriebene Zahlen werden mit Z-Stangen und E-Würfel dargestellt. Regel: Zuerst Z-Stangen links, dann E-Würfel rechts legen. Zunächst konkret (Phase ①), dann zunehmend in der Vorstellung (»Wie viele Z-Stangen bräuchte ich für die 87?«)
- Zahlzerlegungen (an den statischen Fingerbildern, vgl. Schipper, 2009).

Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Phasenmodell nicht als *Stufenmodell* zu sehen ist. Selbstverständlich kann es vielen Schülerinnen und Schülern gelingen, direkt aus der konkreten Materialhandlung ein mentales Modell zu entwickeln, ohne dass explizit die Phasen ② und ③ durchlaufen werden müssen. Das Konzept wurde als Leitfaden für die Organisation von Lernumgebungen und zur Dokumentation von Lernfortschritten bei der Förderung besonders leistungsschwacher Kinder und Jugendlicher entwickelt.

Voraussetzung für eine erfolgreiche Förderung ist die Auswahl eines *geeigneten Veranschaulichungsmittels.* An fast allen Materialien können richtige Lösungen bestimmt werden. Viel wichtiger ist jedoch, dass ein Material geeignet ist, den angestrebten Lerninhalt daran auch handelnd zu lernen und diese Handlung daran nicht nur konkret, sondern auch in der Vorstellung ausführen zu können. An vielen Materialien (Wendeplättchen, Steckwürfel) ist im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus beispielsweise *keine* nichtzählende Zahldarstellung möglich – diese Materialien sind also ungeeignet, um eine Ablösung vom Zählenden Rechnen zu unterstützen. Ein weiteres Kriterium für die Auswahl eines Materials ist, dass die Handlung daran nicht nur konkret (Phase ① und ②), sondern auch in der Vorstellung ausgeführt werden kann (Phase ③ und ④). Beispielsweise ist es schwer, sich 52 Perlen einer Rechenkette vorzustellen, an einem Rechenrahmen mit 5-er Strukturierung hingegen leicht möglich. Geeignete Veranschaulichungsmaterialien und Vorgehensweisen bei der Auswahl sind ausführlich bei Schipper (2009), Schulz u. Wartha (im Druck) und Krauthausen u. Scherer (2007) diskutiert.

Grundvorstellungen sind nicht als isolierte Werkzeuge zu verstehen – leistungsfähig werden sie erst, wenn sie ein Netzwerk aus Zusammenhängen und Abgrenzungen bilden. Sollen beispielsweise Aufgaben wie 74–38 schrittweise gerechnet werdem, ist eine Kombination von mehreren Grundvorstellungen nötig. Zunächst muss zu den Zahlen 74 und 38 eine Grundvorstellung (beispielsweise als Anzahl einer Menge) aktiviert werden. Wird nun schrittweise gerechnet, so erfolgt die verständnisbasierte Berechnung der Aufgabe (vgl. Benz 2007) über zwei Schritte:

- Verrechnung der Einer durch die Aktivierung der Strategie, schrittweise über den Zehner zu rechnen (vgl. Tabelle 1).
- Verrechnung der Zehner durch Aktivierung einer Grundvorstellung zur Zehneranalogie.

Da dem Aufbau der Grundvorstellungen *Schrittweise über den Zehner* und *Nutzen der Zehneranalogie* nicht nur zwei grundsätzlich verschiedene Materialhandlungen, sondern auch zwei verschiedene Materialien (Rechenrahmen und Mehrsystemblöcke) zu Grunde liegen, empfiehlt es sich, diese Grundvorstellungen erst zu verknüpfen, wenn die Handlungen nicht mehr konkret, sondern schon im Kopf durchgeführt werden können. Ein Materialwechsel zwischen Schritt 1 und 2 würde die Aufmerksamkeit zu weit von der Rechnung entfernen. Anders gesprochen: Aufgaben des Typs ZE ± ZE mit Zehnerübergang werden im Rahmen dieses Förderkonzepts erst behandelt, wenn Aufgaben der Art ZE ± E und ZE ± Z wenigstens in Phase ③ bearbeitet werden können.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die grundsätzliche Idee zum Aufbau von Grundvorstellungen zu Zahlen, Operationen und Strategien ist die Unterstützung der Verinnerlichung von Handlungen (die dem mathematischen Inhalt entsprechen) an einem geeigneten Material. Ziel sollte es sein, aus konkreten Handlungen zunehmend gedankliche Modelle zu entwickeln. Wie dies gelingen kann, wurde an Hand des Vierphasenmodells vorgeschlagen. Dieses Konzept kann bei allen Kindern Anwendung finden, insbesondere jedoch bei solchen, die besonders große Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben. Der Unterschied zu Kindern mit besonderen Begabungen (die oftmals ohne Unterstützung aus einer Situation sofort ein flexibles mentales Modell entwickeln) ist, dass insbesondere die Phasen ② und ③ besonders intensiv thematisiert und verknüpft werden. Hier wird weder rein symbolisch noch ausschließlich konkret am Material gearbeitet, es ist vielmehr eine enge Verknüpfung beider Darstellungsebenen gefordert. Zahlreiche weitere Hinweise für die konkrete Förderarbeit nach diesem Modell finden sich bei Wartha u. Schulz (in Vorb.).

Bei besonders großen Schwierigkeiten beim Lernen von Mathematik sind die drei Hauptsymptome im Zentrum von Diagnose- und Förderarbeit:

1 Verfestigtes zählendes Rechnen
2 Unzureichendes Stellenwertverständnis
3 Grundvorstellungsdefizite

Diese drei Hauptsymptome stehen in enger Beziehung zueinander und bilden drei Beobachtungsschwerpunkte bei der Analyse von Bearbeitungswegen zu Rechenaufgaben. Nur die Prozesse können Aufschluss über die Art der Schwierigkeiten und somit die Entwicklung von Fördermaßnahmen geben – weswegen eine kompetenz- und prozessorientierte Diagnose sowohl im Förder- als auch im Regelunterricht sinnvoll und zielführend ist.

Literatur

Benz, Ch. (2007). Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE ± ZE im Verlauf des zweiten Schuljahres. Journal für Mathematikdidaktik, 28 (1), S. 49-73.

Blum, W., Hofe, R. vom, Jordan, A., Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als diagnostisches und aufgabenanalytisches Instrument bei PISA. In: M. Neubrand (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. S. 145-157. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Fricke, A. (1959). Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget. Westermanns pädagogische Beiträge, S. 99-114.

Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Olivier, A.I., Carpenter, Th.P., Fennema, E., Human, P.G. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. In: Journal for Research in Mathematics Education 28 (2), S. 130-162.

Gaidoschik, M. (2008). Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Buxtehude: Persen.

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt a.M.: Verlag Peter Lang.

Gerster, H.-D. (2009): Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In: A. Fritz, G. Ricken, S. Schmidt (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche. S. 248-268. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Hofe, R. vom (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

Kaufmann, S., Wessolowski, S. (2006). Rechenstörungen – Diagnose und Förderung. Seelze: Kallmeyer.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Bonn: KMK.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum.

Lorenz, J.H. (1998). Das arithmetische Denken von Grundschulkindern. In: A. Peter-Koop (Hrsg). Das besondere Kind im Mathematikunterricht. S. 59-81. Offenburg: Mildenberger.

Lorenz, J.H. (2003). Lernschwache Rechner fördern. Berlin: Cornelsen.

Lorenz, J.H. (2009). Diagnose und Prävention von Rechenschwäche als Herausforderung im Elementar- und Primarbereich. In: A. Heinze, M. Grüßing (Hrsg.). Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. S. 17-34. Münster: Waxmann.

Moser Opitz, E. (2002). Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern: Haupt.

Sarama, J., Clements, D.H. (2009). Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children. 1st ed. New York: Routledge.

Scherer, P., Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (2005). Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Rechenstörungen als schulische Herausforderung. Basispapier zum SINUS-Modul G4: Kiel: IPN-Materialien. Download von http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M4.pdf (6.4.2011).

Schipper, W. (2008). Rechenstörungen als schulische Herausforderung – Handreichung zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen. Ludwigsfelde-Struveshof: LISUM. Download von http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/handreichung-schipper.pdf (4.10.2010).

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Schulz, A., Wartha, S. (im Druck). Materialeinsatz im Mathematikunterricht – Anforderungen an Material und Aufgaben der Lehrkraft. Erscheint in MNU primar.

Selter, Ch., Spiegel, H. (2008). Kinder u. Mathematik – Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Selter, Ch. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Journal für Mathematikdidaktik, 21 (3-4), S. 227-258.

Wartha, S., Schulz, A. (in Vorb.). Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechenstrategien bis 100. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S. (2011). Handeln und verstehen. Förderbaustein: Grundvorstellungen aufbauen. Mathematik lehren 166, S. 12-17.

Wollring, B. (2010). EMBIG Handlungsleitende Diagnostik zu Raum und Form. Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 943-946. Münster: WTM Verlag.

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*

IPN

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Ministerium für Bildung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

DIPF

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-208-6