Erschienen in: Baum, M. / Wielpütz, H. (Hrsg.)(2003): Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S. 221-237.

Wilhelm Schipper

Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht

Unser Mathematikunterricht wird u.a. von zwei ehernen didaktischen Prinzipien geleitet, dem der Anschaulichkeit und dem der Handlungsorientierung. Wohl niemand wird diese Grundsätze ernsthaft in Frage stellen wollen. Oder können Sie sich z. B. einen arithmetischen Anfangsunterricht vorstellen, in dem keine Materialien eingesetzt werden?

Das Problem ist, dass über Selbstverständliches oft nicht bzw. nicht mehr intensiv genug nachgedacht wird. Im Sinne der Förderung der mathematischen Lernprozesse der uns anvertrauten Kinder wäre es jedoch notwendig und hilfreich, wieder einmal intensiver über die Rolle von Materialien beim Mathematiklernen zu reflektieren. Denn nicht jedes Zeigen eines Bildes macht den Unterricht schon anschaulich und nicht jedes Machen ist Handlungsorientierung. Wo aber liegen die Grenzen zwischen einem Zerrbild von Handlungsorientierung, wie es Sundermann/Selter (2000) am Beispiel mancher absurder Vorschläge für das Stationenlernen (etwa: Malaufgaben mit der Taschenlampe blinken) treffend kritisieren, und einer tatsächlichen Handlungsorientierung, die das Lernen des Kindes unterstützt? Welche Ziele verfolgen wir mit dem Einsatz von Material? Kommt es allein darauf an, *dass* die Kinder Arbeitsmittel verwenden, oder ist es auch wichtig, *wie* sie damit umgehen? Hängt die Antwort auf diese Frage vielleicht von den Zielen des Unterrichts ab? Was lernen die Kinder eigentlich, wenn sie mit ihrem Material arbeiten? Kann die Materialverwendung für das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts vielleicht auch kontraproduktiv sein, weil sie die mathematischen Lernprozesse der Kinder eher behindert statt sie zu fördern? Wie können wir Kindern helfen, die von ihren Materialhandlungen nicht profitieren, solchen Kindern also, die beim Rechnen ohne Material immer wieder auf das Zählen zurückfallen? Was machen wir mit solchen Kindern, die mit ihren Materialhandlungen völlig in die Irre gehen, also solche Handlungen durchführen, die nicht nur zur falschen Lösung der Rechenaufgabe führen, sondern - weitaus schlimmer - falsche Rechenstrategien stabilisieren? Wie lernen wir als Lehrerinnen und Lehrer, solche Probleme frühzeitig zu erkennen? Wie können wir intervenieren oder - besser noch - durch präventive Maßnahmen solche Irrwege verhindern?

Solchen Fragen geht dieser Beitrag nach. Dabei versteht er sich als ein Plädoyer dafür, das Thema „Lernen mit Material" zum Gegenstand schulinterner Beratungen zu machen. Denn die intensive, möglichst gemeinsame, kollegiale Auseinandersetzung mit diesem Thema einschließlich eigener praktischer Erprobung der Arbeitsmittel im Sinne einer Simulation möglicher kindlicher Handlungen an ihnen macht frühzeitig auf die Chancen guter, aber auch auf die Risiken schlechter Materialverwendung aufmerksam.

1. Funktionen des Einsatzes von Material im Anfangsunterricht

Haben Sie jemals ernsthaft darüber nachgedacht, warum Sie Ihren Kindern im ersten Schuljahr für die Lösung solcher Aufgaben wie 3 + 4, 7 + 9 oder 14 – 6 keinen Taschenrechner geben? Bevor Sie heftig protestieren, weil dies zu diesem Zeitpunkt „selbstverständlich" ein großer didaktischer Fehler wäre, versuchen Sie doch einmal ein paar Argumente zu sammeln, die gegen die Nutzung des Taschenrechners bei solchen Aufgaben im ersten Schuljahr sprechen. Vielleicht können Sie auch gemeinsam in einer Lehrer- oder Fachkonferenz solche Argumente miteinander austauschen und bewerten.

Möglicherweise werden Gegenargumente der folgenden Art vorgetragen:
- Kinder sollen selbst das Rechnen lernen.

- Der Taschenrechner zeigt den Kindern nicht, *wie* solche Aufgaben gerechnet werden.
- Im Mathematikunterricht kommt es nicht nur auf die Ergebnisse, sondern vor allem auf die Rechenwege an. Kinder müssen also selbst Rechenstrategien entwickeln; dabei hilft der Taschenrechner nicht.
- Der Taschenrechner vermittelt kein Grundverständnis für Zahlen und Rechenoperationen. Gerade dieses sollen die Kinder aber im Mathematikunterricht erwerben.

Solche Argumente sind Hinweise auf die grundsätzliche didaktische Funktion des Einsatzes von Material im Mathematikunterricht und zugleich Verweise auf unterschiedliche Ziele seines Einsatzes.

Material soll das (Mathematik-) Lernen der Kinder unterstützen, das ist selbstverständlich. Bei genauerer Betrachtung wird deutlich, dass es im arithmetischen Anfangsunterricht vor allem um zwei Ziele geht.

1. Förderung von Zahl- und Operationsverständnis

Der Einsatz von Material soll dazu beitragen, das Zahlverständnis zu fördern sowie Grundvorstellungen für die abstrakten mathematischen Operationen Addition und Subtraktion zu entwickeln bzw. weiter zu festigen. Einen wichtigen Beitrag zur Förderung des Zahlverständnisses leisten Übungen zur Zahldarstellung („Lege 5 Plättchen.“) und zur Zahlauffassung („Wie viele Bälle sind hier abgebildet?“). Das Grundverständnis für Addition und Subtraktion wird u. a. dadurch gefördert, dass Rechengeschichten (und später kontextfreie Rechenaufgaben) in Materialhandlungen z. B. des Zusammenlegens, des Dazulegens oder des Wegnehmens übersetzt werden. Die Art der Materialhandlung – Abzählen in Einerschritten oder Zahldarstellungen „mit einem Griff“ – spielt zu diesem Zeitpunkt noch eine untergeordnete Rolle. Denn wichtig ist im Sinne der Förderung des Grundverständnisses, *dass* den Kindern solche Zahldarstellungen und Simulationen von Rechengeschichten mit Materialhandlungen gelingen.

2. Entwicklung von Rechenstrategien

Mit Hilfe von Handlungen am Material sollen die Kinder das Rechnen lernen. Das bedeutet, dass aus den Materialhandlungen (mentale) Operationen entstehen sollen, die vollzogen werden können, ohne des konkreten Handlungsvollzuges zu bedürfen. Aus dem Lösen von Aufgaben mit Hilfe des Arbeitsmittels soll also ein Lösen von Aufgaben „im Kopf“ werden.
An dieses Kopfrechnen stellen wir hohe Anforderungen, denn auf Dauer sind wir nicht damit zufrieden, dass die Kinder die Aufgaben „irgendwie“ (z. B. zählend) lösen. Wir wollen vielmehr, dass sie flexible und ökonomische, operative Strategien des Kopfrechnens entwickeln, nämlich

- erstens das Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen („Sieben plus neun ist das Doppelte von sieben, plus zwei.“),
- zweitens schrittweise rechnen ($7 + 9 = 7 + 3 + 6$),
- drittens Aufgaben gegensinnig verändern ($7 + 9 = 8 + 8$) und
- viertens Hilfsaufgaben nutzen ($7 + 9 = 7 + 10 - 1$).

Wenn wir im Piaget´schen Sinne Operationen als „verinnerlichtes Tun“ begreifen, dann setzt das voraus, dass die Handlungen am Material mit den angestrebten Verfahren strukturell übereinstimmen. Bereits die Handlung muss die Struktur des künftigen Kopfrechenverfahrens enthalten. Nur so können sich aus Handlungen durch Verinnerlichung die erwünschten (mentalen) Operationen entwickeln. Anders als bei dem Ziel der Förderung des Grundverständnisses kommt es deshalb bei der Entwicklung von Rechenstrategien entscheidend darauf an, *welche* Handlungen die Kinder am Material vollziehen.

Für das Erreichen beider Ziele - Entwicklung von Zahl- und Operationsverständnis einerseits sowie von Rechenstrategien andererseits - ist es notwendig, dass den Kindern die Handlungen bewusst werden. Denn weder durch bloßes „Machen" noch durch schlichtes „Hinsehen" erschließen sich den Kindern die mathematischen Strukturen in Handlungen bzw. in sogenannten Veranschaulichungen. Ein „handlungsorientierter Unterricht" verdient diesen Namen nur dann, wenn er nicht im bloßen Aktionismus verbleibt, sondern zugleich „vorstellungsorientiert" ist in dem Sinne, dass den Kindern die in den Handlungen enthaltenen mathematischen Strukturen bewusst (gemacht) werden. Wie dieser Prozess durch geeignete unterrichtliche Hilfen unterstützt werden kann, wird in den folgenden Kapiteln 2 und 3 gezeigt.

2. Material als Hilfe bei der (Weiter-) Entwicklung von Zahl- und Operationsverständnis

Auf den ersten Blick scheinen Materialien vor allem Lösungshilfen zu sein. Immer dann, wenn eine gegebene Rechenaufgabe von dem Kind noch nicht ohne Hilfsmittel bewältigt werden kann, greift es auf sein Arbeitsmittel zurück. Aus Sicht des Kindes ist diese Funktion als Lösungshilfe sehr wichtig, weil es das Kind in die Lage versetzt, vorgegebene rechnerische Anforderungen zu bewältigen. Aus didaktischer Sicht kann der Einsatz von Material nicht auf diese Funktion reduziert bleiben, denn dann unterschieden sich solche Materialien nicht vom Taschenrechner, der auch nur die Lösung liefert.

Tatsächlich finden in solchen Handlungen zur Lösung von Aufgaben auch schon sehr viel mehr Lernprozesse statt. Die Übersetzung einer Rechengeschichte („Vier Kinder spielen im Sandkasten, fünf Kinder kommen dazu.") oder einer kontextfreien Aufgabe (4 + 5) in eine Handlung (Erst 4, dann 5 Plättchen legen, danach abzählen, wie viele es insgesamt sind.) fordert und fördert das Grundverständnis für Zahlen und Rechenoperationen. Die Fähigkeiten, Zahlen darstellen (4 Plättchen legen) bzw. auffassen (9 Plättchen abzählen können) sowie Additionsaufgaben in Handlungen des Dazulegens, Subtraktionen in Handlungen des Wegnehmens übersetzen zu können, sind grundlegende Voraussetzungen für die erfolgreiche Teilnahme am arithmetischen Anfangsunterricht.

Im ersten Halbjahr des ersten Schuljahres sollte daher ein unterrichtlicher Schwerpunkt bei der Übersetzung von Rechengeschichten in Handlungen an Material liegen. Begonnen werden sollte mit solchen Beispielen, bei denen beide Summanden bzw. Minuend und Subtrahend gegeben sind, also jeweils die Summe bzw. Differenz gesucht ist.
Beispiele:

- Friederike hat 4 Puppen. Zum Geburtstag bekommt sie noch 2 Puppen dazu. Wie viele hat sie dann?
- Friederike hat 4 Puppen. Helene hat 3 Puppen. Wie viele Puppen haben beide zusammen?
- Theo hat 8 Puppen. Er gibt Helene 3 Puppen ab. Wie viele hat er dann noch?

Aus Studien (Stern 1992) wissen wir, dass etwa 9 von 10 Schulanfängern solche Rechengeschichten in Handlungen übersetzen und auf diese Weise lösen können. Unsere besondere Aufmerksamkeit benötigen daher diejenigen Kinder, die dazu noch nicht fähig sind. Sie brauchen möglicherweise noch Unterstützung bei der Zahlauffassung und –darstellung, ggf. sogar beim Zählen.

Ziel solcher Übungen zur Übersetzung von Rechengeschichten (und später auch von kontextfreien Rechenaufgaben wie $6 + 3 = \square$ bzw. $7 - 5 = \square$) in Handlungen ist der Aufbau von mentalen Vorstellungen des Zusammenlegens als Grundvorstellung für die Addition bzw. des Wegnehmens oder Abtrennens als Grundvorstellung für die Subtraktion, so dass die Kinder letztlich nur noch mit den Vorstellungen operieren, auf den konkreten Handlungsvollzug verzichten können. Vier Maßnahmen sind geeignet, diesen Prozess des Aufbaus von Grundvorstellungen zu unterstützen.

1. Handlungen versprachlichen

Handlungen am Material werden durch Versprachlichung bewusster. Die Kinder sollen deshalb ihre Vorgehensweisen erklären und begründen. Wichtig ist dabei, dass nicht nur die eigentliche Lösungshandlung beschrieben wird, sondern jeweils die Beziehungen zwischen Teilen der Rechengeschichte und den zugehörigen Handlungen herausgearbeitet werden, z. B.: „Ich lege zuerst 4 Plättchen für die 4 Puppen von Friederike, dann ...“. Dies hilft den Kindern, sich bewusst zu werden, welche Handlungen mit welchem Teil der Rechengeschichte korrespondieren. Solche Versprachlichungen sind dann auch Hilfen für diejenigen Kinder, denen die Lösung von Rechengeschichten mit Handlungen noch nicht so gut gelingt.
In diesen kindlichen Erklärungen ihrer Vorgehensweisen, die durch entsprechende Materialhandlungen begleitet werden, zeigt sich eine weitere wichtige Funktion solcher Arbeitsmittel, nämlich als Argumentationshilfe; die Demonstration am Material unterstützt die verbale Beschreibung.

2. Die Beziehungen zwischen Kontext, Handlung, Bild und Symbol herausarbeiten

Das o.a. Beispiel für eine Versprachlichung beschreibt schon eine entwickeltere Form von Lösungshandlungen, nämlich mit Vertretern (Plättchen) für die in der Rechengeschichte vorkommenden realen Gegenstände. Für einige Kinder kann dies ein schon zu hoher Anspruch sein. In solchen Fällen sollten die Rechengeschichten um solche Gegenstände kreisen, die auch vorhanden sind, so dass die Kinder mit ihnen die Handlungen durchführen („durchspielen“) können. Ziel der weiteren Aktivitäten ist es, zu immer abstrakteren Darstellungen der im Sachkontext gegebenen arithmetischen Beziehungen zu kommen. Es gilt, die Kinder zu befähigen, Kontext, Handlungen mit den Originalgegenständen, Handlungen mit deren Stellvertretern, Bild und symbolische Notation in Gleichungsform aufeinander beziehen zu können. Auch diese strukturellen Übereinstimmungen zwischen

- Sachkontext und Materialhandlung,
- den Spielhandlungen mit den Originalgegenständen und denen mit ihren Vertretern (z. B. Plättchen),
- den Materialhandlungen und deren bildlicher Darstellung,
- der bildlichen Darstellung und ihrer symbolischen Notation in Gleichungsform

müssen durch Versprachlichung immer wieder hervorgehoben werden. Dabei darf dieser intermodale Transfer zwischen den Modi des Wissens – enaktiv, ikonisch, symbolisch – nicht als Einbahnstraße von den Handlungen über die Bilder zu den Symbolen aufgefasst werden. Es müssen bewusst auch umgekehrte Transferleistungen gefordert und gefördert werden: zu einem Bild eine Rechengeschichte erzählen, zu einer Gleichung oder einem Term Handlungen mit Material durchführen, zu Handlungen mit Plättchen Rechengeschichten verschiedenen Inhalts erfinden u.v.a.m.

3. Mit vielen Sinnen lernen

Im Unterricht dominieren i. d. R. zwei Kanäle des Lernens, nämlich die Sprache und das Visuelle. Hin und wieder sollten diese bewusst ausgeschaltet werden. Unter dem Titel „Mathe mit geschlossenen Augen“ haben kürzlich Bauersfeld und O’Brien (2002) unterrichtspraktische Vorschläge publiziert, die zeigen, wie andere Lernkanäle, z. B. der Tastsinn, stärker herausgefordert werden können. Ein Beispiel: „Einer hält dem anderen mit geschlossenen Augen beide Hände offen hin. Der legt in jede Hand einige Bohnen. Der Erste soll mit unverändert geschlossenen Augen herausfinden, wie viele Bohnen es zusammen sind.“ (Bauersfeld/O’Brien 2002, S. 11) Solche Übungen zum Fühlen und Hören von Zahlen (genauer: von

Zahlrepräsentanten) und Rechenaufgaben findet man seit einigen Jahren auch in Schulbüchern. Sie sind nicht bloß „Spielchen“ zum Vergnügen der Kinder, sondern sollen das Zahl- und Operationsverständnis durch ein Lernen mit vielen Sinnen stärken.

4. Den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder unterstützen
Manche Kinder entwickeln überraschend schnell innere Vorstellungsbilder. Die Lehrerin demonstriert eine bestimmte Vorgehensweise, das Kind macht es selbst einige Male und schon können diese Kinder auf den konkreten Handlungsvollzug verzichten, weil sie eine Vorstellung von der Handlung haben. Unsere weniger leistungsstarken Kinder gehören selten zu dieser Gruppe von Schülern. Sie brauchen weitere Unterstützung, die ihnen hilft, den Prozess der Entwicklung von Vorstellungen aus Handlungen vollziehen zu können. Eine gute Möglichkeit besteht darin, das Taktile und das Visuelle bewusst auszuschließen, zugleich aber die Vorstellung des Handlungsvollzugs am Material hervorzurufen. Ein Beispiel: Alle Kinder schließen die Augen. Die Lehrerin erzählt eine Rechengeschichte der o. g. Art, dann fragt sie die Kinder, was sie, die Lehrerin, zur Lösung der Aufgabe tun soll. Ein Kind antwortet mit geschlossenen Augen: „Lege 4 Plättchen für die 4 Puppen, die Friederike schon hat.“ Die Lehrerin legt die Plättchen und fragt die Kinder, ob sie diese 4 Plättchen „sehen“ – selbstverständlich mit geschlossenen Augen. Das nächste Kind beschreibt, was dann zu tun ist: „Lege nun 2 Plättchen dazu für die beiden Puppen, die sie noch bekommt.“ ... Auf diese Weise können Rechengeschichten gelöst werden, indem nur noch die Vorstellungen der Handlung erzeugt werden, auf den eigentlichen Handlungsvollzug durch die Kinder verzichtet wird.

Aufgaben mit Variationen des Platzhalters (3 + □ = 7; □ + 5 = 8) sind für viele Kinder zunächst besonders schwer, weil sie nicht wissen, wie sie solche Aufgaben in Handlungen übersetzen sollen. So konnte Stern (1994) zeigen, dass nur 28% der von ihr untersuchten Erstklässler die folgende Aufgabe (ggf. mit Hilfe von Material) lösen konnten: „Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?“ Dagegen konnten 96% der gleichen Kinder die folgende anscheinend strukturgleiche Aufgabe lösen: „Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria noch bekommen, damit sie genau so viele Murmeln hat wie Hans?“ Diese zweite Aufgabe gibt den Kindern mit der Formulierung „bekommen“ einen Hinweis auf die durchzuführende Materialhandlung; das abstrakte „mehr“ in der ersten Aufgabe gibt diesen Hinweis nicht.

Für den Unterricht bedeutet dies, dass auch die Aufgaben mit Variation des Platzhalters zunächst handelnd gelöst werden müssen. Sehr gut können solche Aufgaben mit Hilfe des „Zauberbeutels“ (vgl. Radatz u. a. 1996, S. 64f.) dargestellt werden. Ein Beispiel zu der Aufgabe □ + 3 = 8: Die Lehrerin zeigt den Kindern einen Beutel, in dem bereits einige Würfel liegen. Wie viele es sind, wird nicht verraten. Dann werden 3 weitere Würfel in den Beutel gegeben; alle Kinder schauen dabei zu. Danach wird gezählt; jetzt sind es 8 Würfel. Wie viele waren es zu Anfang? Auch diese Übungen sollten nach einiger Zeit konkreter Durchführungen durch nur noch vorgestellte Handlungen ersetzt werden: „*Stellt Euch vor*, im Beutel sind schon einige Würfel. Wenn ich noch drei dazu lege, dann sind es insgesamt acht Würfel. Wie viele waren es zu Anfang?“

3. Material als Hilfe bei der Entwicklung von Rechenstrategien

In der soeben beschriebenen Phase des Unterrichts werden viele Kinder die eigentliche Rechenaufgabe noch durch Abzählen lösen. Das ist durchaus akzeptabel, denn es geht ja um den Aufbau und die Erweiterung des Operationsverständnisses, noch nicht um die Entwicklung von Rechenstrategien. Diese Situation ändert sich mit der Behandlung des Zehnerübergangs. Denn dieses Thema ist nicht nur ein weiterer Bereich, in dem das Grundverständnis für die ersten Rechenoperationen vertieft werden kann, sondern bietet erstmals die Chance, Rechenaufgaben mit Hilfe verschiedener operativer Strategien zu lösen und zwar solcher Strategien, die modellhaft für alles weitere additive Rechnen sind.

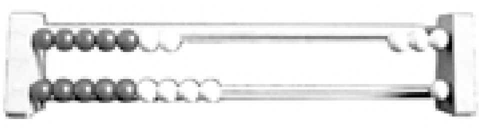
Lehrerinnen und Lehrer müssen daher bei der Behandlung des Zehnerübergangs eine weit reichende Entscheidung treffen. Wenn sie dieses Thema nur als einen weiteren Anwendungsbereich zur Vertiefung der Grundvorstellungen von Addition und Subtraktion ansehen, dann ist es unerheblich, mit welchen Verfahren die Kinder über den Zehner rechnen. Alle individuellen Verfahren können das Grundverständnis stärken, selbst das zählende Rechnen. Deshalb sollten auch mit dem Ziel der Stärkung des Grundverständnisses *zunächst* die individuellen Wege der Kinder akzeptiert werden. Ein Akzeptieren zählender Bewältigung des Zehnerübergangs *auf Dauer* halten wir jedoch für didaktisch falsch, weil dies die Gefahr der Verfestigung zählenden Rechnens in sich birgt – mit allen Nachteilen bis hin zur möglichen Entwicklung von Rechenstörungen.

Deshalb plädieren wir dafür, die Chance, erste operative Strategien des Rechnens im Kontext der Behandlung des Zehnerübergangs zu entwickeln, auch zu nutzen. In diesem Fall werden die Anforderungen an die Art und Weise der kindlichen Materialhandlungen jedoch größer und differenzierter. Denn wenn Kopfrechenstrategien aus Handlungen an Materialien erwachsen, dann müssen die Handlungen strukturell übereinstimmen mit den angestrebten Strategien. Das bedeutet, dass wir uns zu diesem Zeitpunkt nicht mehr zufrieden geben dürfen mit Handlungen des Abzählens in Einerschritten, weil diese nur das zählende Rechnen stabilisieren. Deshalb wird ein Arbeitsmittel benötigt, das es gestattet, Zahlen als Ganzheiten mit einem „Fingerstreich" darzustellen bzw. auf einen Blick quasi-simultan aufzufassen. In unserer Bielefelder Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen arbeiten wir mit strukturierten Zwanziger- bzw. Hunderter-Rechenrahmen, die – nach entsprechender Einübung – solche schnellen Zahldarstellungen und - auffassungen ermöglichen.

Entwicklung operativer Rechenstrategien aus Handlungen am Rechenrahmen
Dieses Material legt für die Lösung einer Aufgabe wie 7 + 9 drei verschiedene nicht-abzählende Materialhandlungen nahe, die mit drei verschiedenen operativen Strategien des Rechnens über den Zehner korrespondieren.

(a) Lösung mit Hilfe des Verdoppelns
Manche Kinder stellen bei der Aufgabe 7 + 9 von sich aus beide Summanden getrennt dar, die 7 auf der oberen Stange, die 9 unten. Entscheidend ist nun, wie die Kinder den Wert der Summe ermitteln. Wenn sie in dieser Darstellung das „Doppelte von sieben und zwei weitere" sehen, außerdem das Doppelte von 7 auswendig wissen und so zur Lösung 14 + 2 = 16 kommen, dann nutzten sie das Verdoppeln als eine mögliche Strategie, über den Zehner zu rechnen.

Das Verdoppeln nutzen



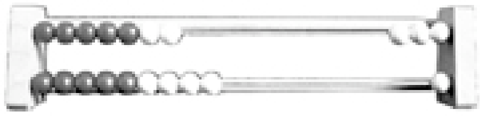
„Sieben plus neun ist das Doppelte von sieben, plus zwei."

Zwei Punkte werden an diesem Beispiel deutlich. Konkrete Zahldarstellungen am Material können den Kern einer guten Kopfrechenstrategie enthalten. Jedoch gelingt dies nicht voraussetzungslos. Die Kinder müssen für solche Lösungswege bereits Erfahrungen gesammelt haben mit Darstellungen des Verdoppelns und Fast-Verdoppelns und sollten nach Möglichkeit das Doppelte aller Zahlen bis 10 auswendig wissen.

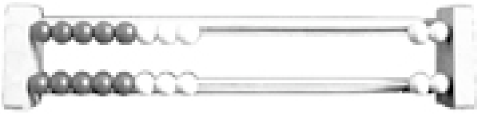
(b) Lösung mit Hilfe des gegensinnigen Veränderns
Eine besonders elegante Art der Lösung der Aufgabe 7 + 9 besteht darin, sie durch gegensinniges Verändern in 8 + 8 zu verwandeln und diese Aufgabe durch Auswendigwissen zu lösen. Nur ganz wenige Kinder kommen auf die Idee, Materialhandlungen zu vollziehen, die diese operative Strategie des Rechnens über den Zehner enthält. Zunächst werden beide Summanden wie bei (a) getrennt auf beiden Stangen dargestellt. Vermutlich in dem Bestreben, eine symmetrische Figur zu erzeugen, schieben die Kinder eine der 9 Kugeln zur Seite, dafür eine weitere Kugel zu den 7 dazu. Auf diese Weise stellen sie das Doppelte von 8 dar.

Lösung mit Hilfe des gegensinnigen Veränderns

Aus 7 + 9...



... wird durch gegensinniges Verändern 8 + 8.



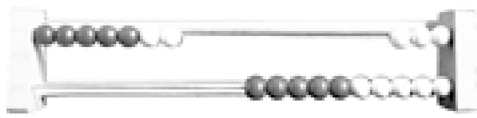
In den sehr seltenen Fällen, in denen wir bei Kindern solche Materialhandlungen beobachten konnten, haben wir ihr Vorgehen besonders gewürdigt. Wir haben jedoch nicht den Anspruch, dass alle Kinder dieses Verfahren im 1. Schuljahr lernen sollen.

(c) Schrittweises Rechnen
Die Besonderheit des Rechenrahmens, genau 10 Kugeln auf einer Stange zu haben, legt Handlungen nahe, die mit dem schrittweisen Rechnen bis 10 und dann weiter korrespondieren. Das Kind stellt zunächst den ersten Summanden dar, füllt die obere Stange um die restlichen 3 Kugeln bis 10 auf und schiebt die noch fehlenden 6 Kugeln auf der zweiten Stange.

Bei vergleichbaren Handlungen an unstrukturierten Materialien und erst recht beim materialunabhängigen Rechnen ergibt sich immer das unterrichtliche Problem, das Rechnen gerade bis 10 zu motivieren, denn für Erstklässler hat die Zahl 10 noch nicht die herausragende Bedeutung als Stufenzahl in unserem dezimalen Stellenwertsystem. Dieses Problem nimmt uns die dem Rechenrahmen inhärente dezimale Struktur ab, so dass das Rechnen bis 10 nicht mit konstruierten Geschichten z. B. vom Frosch, der immer nur bis 10 und dann weiter springt, und dem Känguruh, das zu großen Sprüngen fähig ist (vgl. Steinbring 1994), motiviert werden muss.

Schrittweises Rechnen

Zunächst wird der erste Summand dargestellt, ...



... dann werden die noch bis 10 fehlenden 3 Kugeln auf der oberen Stange geschoben, ...

... schließlich die vom zweiten Summanden noch fehlenden 6 Kugeln auf der unteren Stange dargestellt.

Die oben beschriebene Handlungsfolge entspricht exakt dem operativen Verfahren des schrittweisen Rechnens. Sie kann protokolliert werden in der folgenden bekannten Schreibform:

$\underline{7 + 9 = \square}$	oder	$\underline{7 + 9 = 16}$
$7 + 3 = 10$	verkürzt	$7 + 3 = 10$
$\underline{10 + 6 = 16}$		$10 + 6 = 16$
$7 + 9 = 16$		

Dieses Verfahren ist in der jüngeren Vergangenheit zum Teil heftig kritisiert worden. Wenn sich die Kritik auf ein fast schon drillmäßiges Einüben der Schreibform bezieht, wenn selbst von Kindern, die diese Art der Rechnung bereits souverän im Kopf vollziehen, weiterhin diese Notationsform verlangt wird, dann ist diese Kritik berechtigt. Berechtigt ist sie auch dann, wenn dieses Verfahren als einziges im Unterricht akzeptiert wird. Mit anderen Worten: Die Kritik an den – tatsächlichen oder nur vermuteten – Auswüchsen der unterrichtlichen Behandlung dieses Verfahrens ist berechtigt, nicht jedoch die Kritik am Verfahren selbst. Denn dieses schrittweise Rechnen ist von den drei genannten Verfahren als einziges in dem Sinne universell, dass es immer genutzt werden kann, unabhängig von der spezifischen Wahl der Zahlen. Gegensinniges Verändern ist nur naheliegend bei zwei Summanden, die sich um 2 unterscheiden oder in der Nähe eines vollen Zehners liegen. So ist es (uns Erwachsenen) gut möglich, 6 + 8 über das Doppelte von 7 zu lösen, 9 + 5 über 10 + 4 zu rechnen; dass dagegen die Aufgabe 4 + 8 auch über das Doppelte von 6 lösbar ist, scheint schon nicht mehr so nahe liegend zu sein, auch nicht von den Handlungen am Rechenrahmen her. Ähnlichen Einschränkungen ist das Nutzen des Verdoppelns bzw. Fast-Verdoppelns unterworfen. Nur wenn beide Summanden nahe beieinander liegen, bietet sich dieses Verfahren an. 3 + 8 wird kaum jemand über die Verdoppelung von 3 plus der Differenz aus 3 und 8 rechnen.

Aufmerksame Leserinnen und Leser werden bei den oben dargestellten drei operativen Strategien des Rechnens über den Zehner eine vierte Strategie vermisst haben, nämlich die des Rechnens mit einer Hilfsaufgabe. 7 + 9 kann leicht über 7 + 10 - 1 gerechnet werden, und wir erwarten, dass Kinder auf Dauer diesen Weg als einen möglichen „Rechenvorteil“ nutzen. Daher sollte er auch im Unterricht thematisiert werden. Er fehlt in der obigen Darstellung, weil die zur Strategie passenden Handlungen (7 auf der oberen Stange darstellen, 10 auf der unteren; dann eine Kugel von den 10 zurückschieben) vom Material her nicht nahe gelegt werden. Solche Handlungen werden von Kindern wohl nur dann vollzogen, wenn sie die ihnen bereits vertraute Strategie des Rechnens mit einer Hilfsaufgabe am Rechenrahmen demonstrieren wollen. Ziel der obigen Darstellungen war dagegen aufzuzeigen, wie aus Handlungen, die vom Material her (mehr oder weniger) nahe liegend sind, operative Strategien erwachsen können. Diese Frage der Reihenfolge erscheint vielleicht auf den ersten Blick spitzfindig und vergleichbar mit der Frage, ob zunächst das Huhn oder das Ei dagewesen sei. Tatsächlich ist die Reihenfolge aber von zentraler Bedeutung, wenn wir davon ausgehen, dass (mentale) Operationen sich aus Handlungen entwickeln.

Auf dem Weg zu diesem Ziel gilt es, zwei Hürden zu überwinden. Erstens setzt schrittweises Rechnen voraus, dass die Kinder alle Zerlegungen aller Zahlen bis 10 auswendig wissen. Hilfreiche Übungsformen dafür sind in Radatz u.a. 1996, S. 70ff. und in Radatz u.a. 1999, S. 40f. zu finden. Zweitens vollzieht sich der Prozess der Verinnerlichung der Handlungen hin zu nur noch mentalen Operationen gerade bei den leistungsschwachen Kindern nicht von selbst. Erfahrene Lehrerinnen und Lehrer kennen dieses Problem: Immer wieder werden Handlungen am Material eingeübt. Wenn die Kinder danach die Aufgaben im Kopf, also ohne Material, lösen sollen, verfallen sie wieder auf ihr zählendes Rechnen, z. B. an den Fingern. Offensichtlich gelingt diesen Kindern der Brückenschlag von der Handlung zur Operation nicht ohne zusätzliche Hilfe.

An dieser Stelle empfehlen wir ein Verfahren, das wir vom Prinzip her schon im Kapitel 2 beschrieben haben. Die Kinder schließen die Augen und diktieren ihrem Partner oder ihrer Lehrerin im Förderunterricht die Handlungen am Rechenrahmen: „Stelle die 7 ein. 3 dazu, dann sind es 10. Jetzt noch die restlichen 6 auf der unteren Stange, macht 16.“ Vorbereitet werden können solche Übungen – nach den selbstverständlich notwendigen eigenen Handlungen der Kinder am Material – auch dadurch, dass die Kinder nur noch auf das Material schauen dürfen und beschreiben, was sie machten, wenn sie es in der Hand hätten. Solche Übungen, die die Vorstellung der Handlungen herausfordern, aber keinen konkreten Handlungsvollzug mehr zulassen, haben den entscheidenden Vorteil, dass auch bei einer materialunabhängigen Lösung der Aufgabe die Vorstellung des Materials noch erzeugt und so das Ausweichen auf das zählende Rechnen verhindert wird. Nach unseren Erfahrungen in der Beratungsstelle gelingt es auf diese Weise selbst hartnäckigen zählenden Rechnern, das schrittweise Rechnen als Kopfrechenstrategie zu entwickeln. Aus Handlungen werden Vorstellungen, zunächst handlungsbegleitend, dann handlungsersetzend.

4. Materialhandlungen als Thema der fachlichen Diskussion

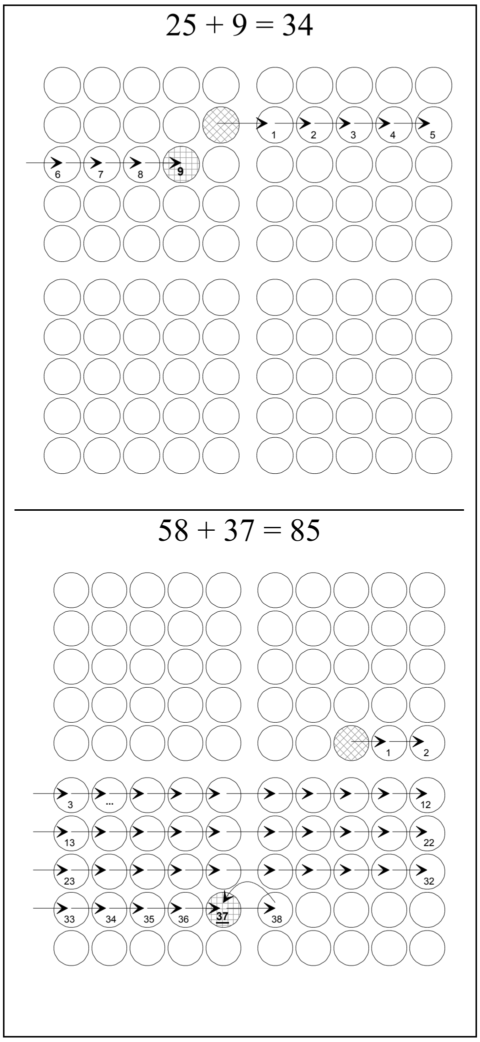
Wenn die Materialhandlungen der Kinder - wie im Kapitel 3 gezeigt - die entscheidende Basis für die Entwicklung von Rechenstrategien sind, dann müssen sie im Zentrum unserer Aufmerksamkeit stehen, nicht erst die schriftlich fixierten Lösungen der Rechenaufgaben. Denn nicht wenige Fehler, die als Rechenfehler identifiziert werden, resultieren aus fehlerhaften Materialhandlungen oder sind Folge eines unzureichenden Verständnisses des Arbeitsmittels.

Dies gilt selbstverständlich nicht nur für den Umgang mit Material im ersten Schuljahr. Auch die Erarbeitung von Strategien der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 erfolgt materialgestützt. Wir empfehlen dafür die Verwendung des Hunderter-Rechenrahmens als strukturgleiche Fortsetzung des Zwanziger-Rechenrahmens aus dem ersten Schuljahr. Dieses Material ist sehr gut geeignet, Aufgaben vom Typ ZE ± E mit Zehnerüberschreitung völlig analog zur ersten Zehnerüberschreitung zu erarbeiten. Bei der Addition bzw. Subtraktion voller Zehner (Beispiel: 37 + 20) kommt dieses Material jedoch an seine Grenzen, weil das Hinzufügen von 20 Kugeln als zwei volle Zehner zu den bereits dargestellten 37 nicht zu einer Standarddarstellung der Zahl 57 führt. Deshalb erarbeiten wir diesen Aufgabentyp in unserer Beratungsstelle an der (bezifferten) Hunderter-Tafel. Additionen bzw. Subtraktionen voller Zehner entsprechen bei diesem Material Wegen nach unten bzw. oben. Selbstverständlich werden diese Wege auch „im Kopf“ gegangen. Für den Aufgabentyp ZE ± ZE mit Zehnerüberschreitung verzichten wir selbst bei Kindern mit Rechenstörungen auf den konkreten Handlungsvollzug am Material. Bei Aufgaben dieser Art sollen die Kinder die Verrechnung der vollen Zehner mit der *Vorstellung* der Hunderter-Tafel, die Zehnerüberschreitung mit der *Vorstellung* des Rechnens am Rechenrahmen vollziehen.

Ein auf den ersten Blick geeigneteres Material scheint das Hunderter-Feld zu sein. Es sieht genau so aus, wie der Hunderter-Rechenrahmen und erlaubt – wie die Hunderter-Tafel – Wege nach unten bzw. oben als Handlungskorrelate zur Addition bzw. Subtraktion voller Zehner. Jedoch unterscheidet es sich in einem wesentlichen Punkt vom Hunderter-Rechenrahmen: Es erlaubt keine Handlungen des Verschiebens von Kugeln, sondern nur solche des Antippens von Feldern.

In einer kürzlich publizierten Studie haben Rottmann und Schipper (2002) untersucht, wie Zweitklässler das Hunderter-Feld bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 nutzen. Die von der Fachlehrerin als leistungsstark in Mathematik eingestuften Kinder haben die Aufgaben fast ausschließlich im Kopf, ohne Materialverwendung gerechnet; dabei waren sie meistens erfolgreich. Die als leistungsschwach eingestuften Kinder haben dagegen in der überwiegenden Mehrheit der Fälle auf das Material zurückgegriffen und dabei zahlreiche Fehler gemacht. Einige Beispiele dafür werden im Folgenden vorgestellt.

Für ein erfolgreiches Arbeiten mit Material ist es zunächst wichtig, dass die Kinder dessen Struktur verstanden haben. Dass schon diese elementare Voraussetzung für eine erfolgreiche Materialverwendung nicht immer gegeben ist, zeigt das folgende Beispiel.



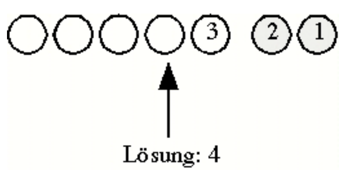
Eine häufige Fehlerquelle besteht nämlich darin, dass die Kinder eine zweistellige Zahl der Form 10m + n in der m-ten Zeile an n-ter Stelle suchen. In diesem Beispiel soll Bernd die Aufgabe 25 + 9 rechnen. Er sucht die 25 in der zweiten Reihe an fünfter Stelle, markiert also die 15, zählt um 9 Felder weiter und identifiziert das so markierte Feld 24 mit seiner fehlerhaften Zeilen-Strategie als 34. Trotz falscher Zahldarstellung und falscher Zahlauffassung gelangt er also rechnerisch zum richtigen Ergebnis, weil sich beide Fehler auf Grund der gleichen Strategie kompensieren.

Diese Kompensation erfolgt jedoch nicht immer. So gelangt das gleiche Kind bei der Aufgabe 58 + 37 zur falschen Lösung 85, indem es die Zahl 58 mit seiner falschen Zeilen-Strategie auf dem Feld 48 markiert, dann um zunächst 38 Einerschritte (!) weiter zählt, diesen Zählfehler durch einen Schritt rückwärts korrigiert und das so erreichte Feld 85 nun nicht mit seiner fehlerhaften Strategie als 95 („neunte Reihe, fünftes Feld“) sondern im Sinne der Zahlauffassung richtig als 85 identifiziert. Die Nähe dieses Feldes 85 zum unteren Rand ist vermutlich die Ursache dafür, dass Bernd dieses Mal nicht auf seine Fehlstrategie zurückgreift und deshalb zu einem rechnerisch falschen Ergebnis kommt.

Nicht wenige Kinder haben Probleme, die kardinale bzw. ordinale Zahldarstellung bzw. –auffassung bei der Verwendung des Materials auseinander zu halten. Sie mischen beide Verwendungsmöglichkeiten und kommen so zu Fehlern. Diese Probleme tauchen insbesondere bei der Subtraktion auf, denn solche Aufgaben können auf zwei verschiedene Weise mit Materialhandlungen richtig gelöst werden, durch Mischung beider Verfahren aber die typischen ±1-Fehler erzeugen. Dies sei zunächst am einfachen Beispiel 7 - 3 gezeigt.

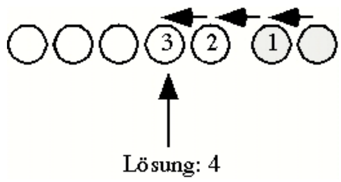
Bei der Verwendung des Materials im Sinne einer kardinalen Zahldarstellung steht die Idee des Wegnehmens im Vordergrund. Angetippt und mit den Zahlwörtern eins, zwei, drei belegt werden diejenigen Plättchen, die entfernt werden sollen. Konsequenterweise liefert die Anzahl der übrig gebliebenen Plättchen die Lösung. Dabei ist es unerheblich, ob diese Lösung durch kardinale Zahlauffassung (4 Plättchen bleiben übrig.) oder im ordinalen Sinne erfolgt: Die (ordinale) Zahleigenschaft des letzten, nicht entfernten Plättchens liefert die Lösung.

Kardinale Verwendung von Material zur Lösung der Aufgabe 7 – 3 = 4



Eine ordinale Deutung des Materials spiegelt sich wider in einem Rückwärtsgehen unter Abzählen der einzelnen Schritte. Obgleich die Kinder auch hierbei Plättchen antippen, werden nicht diese gezählt; vielmehr wird dadurch die Anzahl der Rückwärtsschritte ermittelt. Zunächst wird die Zahl 7 mit dem siebten Plättchen identifiziert, dann erfolgt unter Aussprechen der Zahlwörter ein, zwei, drei der Prozess des Rückwärtsgehens um drei Schritte, wobei fortlaufend die Plättchen Nummer 6, 5, und 4 angetippt werden. Entsprechend liefert die Zahleigenschaft des zuletzt angetippten Plättchens die Lösung der Aufgabe.

Ordinale Verwendung von Material zur Lösung der Aufgabe 7 – 3 = 4

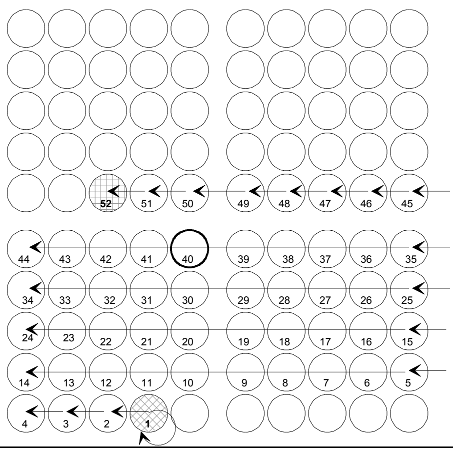


Fehler um +1 oder um -1 bei solchen Subtraktionsaufgaben resultieren daraus, dass beide Vorgehensweisen miteinander gemischt werden. So entsteht der Fehler 7 – 3 = 5 dadurch, dass das Antippen der drei letzten Plättchen und deren Belegung mit den Zahlwörtern eins, zwei, drei kardinal, dann aber die Ermittlung der Lösung im ordinalen Sinne erfolgt: Das mit dem letzten Zahlwort belegte Plättchen repräsentiert anscheinend die Lösung. Ebenfalls durch Mischung beider Vorgehensweisen entsteht der Fehler 7 – 3 = 3. Die Handlungen am Material entsprechen zunächst der ordinalen Verwendung, die Ermittlung des Werts der Differenz erfolgt dann jedoch im kardinalen Sinne: „Der Nächste sagt mir die Lösung.“.

Solche aus dem ersten Schuljahr bekannten, häufig auch beim Rechnen an den Fingern zu beobachtenden Fehler finden sich auch noch bei Materialhandlungen im zweiten Schuljahr.

So kommt Anna bei der Aufgabe 94 - 52 zur Lösung 53, indem sie schon das Feld 94 mit dem Zahlwort 1 belegt. Sie beginnt also im Sinne der kardinalen Vorgehensweise diejenigen Felder abzuzählen, die entfernt werden sollen, zieht aber nicht die Konsequenz, dass bei einer solchen Vorgehensweise nicht das zuletzt angetippte Feld die Lösung liefert, sondern die Anzahl der verbliebenen Felder bzw. (im ordinalen Sinne) die Zahleigenschaft erst des *nächsten* Feldes im Rückwärtszählprozess den Wert der Differenz angibt. Das Unterlassen dieses letzten Schrittes in Verbindung mit ihrer fehlerhaften Zeilen-Strategie bei der Zahlauffassung liefert so ein um +11 abweichendes Ergebnis.

Fehler um +11 als Konsequenz der Kombination zweier Fehlerstrategien: 94 – 52 = 53



Diese wenigen Beispiele zeigen, wie wichtig es ist, die Materialhandlungen der Kinder im Unterricht genau zu beobachten, weil sie Informationen über die Entstehung der Fehler geben und so gezielte Hilfen möglich machen. Diese Handlungen jedoch interpretieren zu können, setzt voraus, dass bereits ein Verständnis für mögliche Fehlvorstellungen von Kindern vorhanden ist. Dieses Verständnis wiederum wird durch Beobachtung solcher Handlungen gefördert. Aus dieser Zirkularität - Verstehen als Voraussetzung und Folge der Beobachtung - kommt man nur durch gestützte Einübung heraus.

Aus diesem Grunde sollten solche Übungen zur Interpretation kindlicher Materialhandlungen unverzichtbarer Bestandteil der Lehrerausbildung sein. Wenn die Ausbildung künftiger (Grundschul-) Lehrerinnen und Lehrer tatsächlich berufsvorbereitend sein soll, dann gehört die Auseinandersetzung mit gelingenden und misslingenden Lernprozessen von Kindern zum Kernbestand dieser Ausbildung; und Materialhandlungen sind ein bedeutsamer Teil dieses Themas.

In gleicher Weise sollten erfolgreiche und – erst recht – nicht erfolgreiche Materialhandlungen in der Lehrerfortbildung thematisiert werden. Für schulinterne Maßnahmen dieser Art empfehlen wir daher ebenfalls, solche Interpretationen kindlicher Materialhandlungen zu einem Gegenstand der Beratung zu machen. Die o.a. Abbildungen können für erste Übungen verwendet werden, weitere finden Sie im Anhang zu diesem Beitrag. Aufschlussreicher noch als diese Beispiele sind sicher solche aus dem eigenen Unterricht. Nehmen Sie sich die Zeit, sich zu einem einzelnen Kind zu setzen und dessen Handlungen genau zu beobachten. Denn diese zeigen Ihnen nicht nur, wie erfolgreich Ihr Unterricht bei diesem Kind war, sondern offenbaren auch, welche weitere Hilfe das Kind noch benötigt. Wenn Sie besonders mutig sind, zeichnen Sie solche Materialhandlungen „Ihrer" Kinder per Video auf und präsentieren sie Ihrem Kollegium zur Beratung. Das aber wäre sicher schon eine sehr weit entwickelte Form der Behandlung des Themas „Lernen mit Material" im Rahmen der kollegialen Diskussion.

Literatur

Bauersfeld, H./O'Brien, T. (2002): Mathe mit geschlossenen Augen. Mülheim/Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Floer, J. (1996): Mathematik-Werkstatt, Lernmaterialien zum Rechnen und Entdecken für Klassen 1 bis 4. Weinheim und Basel: Beltz.

Radatz, H. u. a. (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Radatz, H. u. a. (1998): Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Radatz, H. u.a. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Rottmann, T./Schipper, W. (2002): Das Hunderter-Feld - Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? In: Journal für Mathematik-Didaktik, 23, Heft 1, S. 51-74.

Schipper, W./Hülshoff, A. (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? In: Die Grundschule, 16, H.4, S.54-56.

Steinbring, H. (1994): Frosch, Känguruh und Zehnerübergang. Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Maier, H./Voigt, J. (Hrsg.) (1994): Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. Köln: Aulis.

Stern, E. (1992): Warum werden Kapitänsaufgaben »gelöst«? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. In: Der Mathematikunterricht, 38, Heft 5, S. 7 – 29.

Stern, E. (1994): Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben. In: Die Grundschule, 26, Heft 3, S. 23-25.

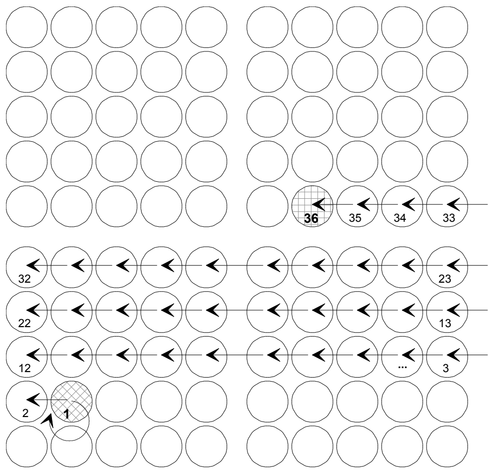
Sundermann, B./Selter, Ch. (2000) : Quattro Stagioni – Nachdenkliches zum Stationenlernen aus mathematikdidaktischer Perspektive. In: Meier, R. u.a. (Hrsg.): Üben und Wiederholen, Friedrich Jahresheft 2000, Seelze, S. 110-113.

Frau Dr. Carla Merschmeyer-Brüwer danke ich für kritisch-konstruktive Rückmeldungen zur ersten Manuskriptfassung, Thomas Rottmann für die Abbildungen im Kapitel 5 und im Anhang.

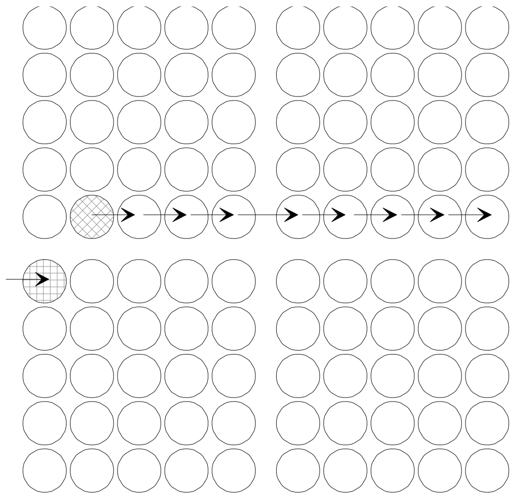
Anhang

Welche Fehlvorstellungen von Kindern zeigen sich in den folgenden Materialhandlungen?

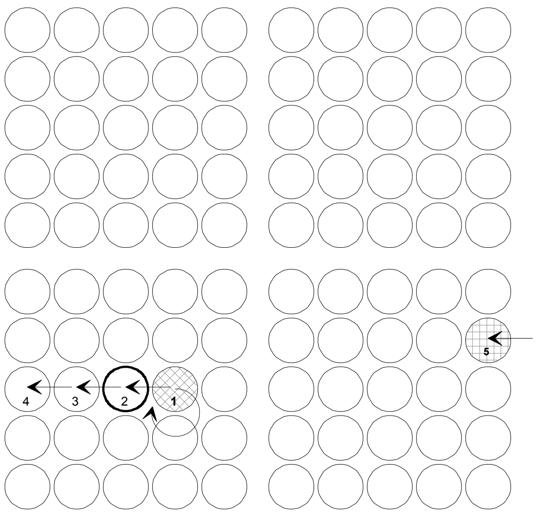
82 - 36 = 57



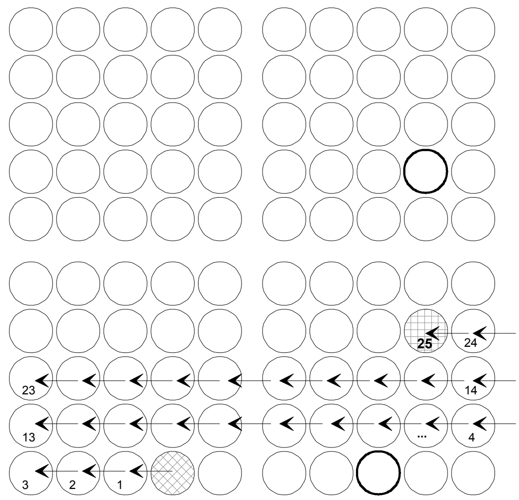
25 + 9 = 61



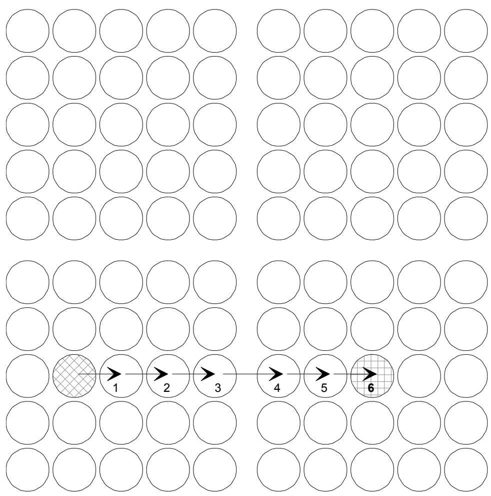
47 - 5 = 69



94 - 52 = 79



72 + 6 = 77



85 - 30 = 28